جامعة البعث　　　　　　تحليل عقدي/1/　　　　　　اسم الطالب:

قسم الرياضيات　　　　　　الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 – 2017

==

السؤال الأول: ($10+10+10=30$ **درجة**)

1". أثبت أنَّ:
$$\left[\frac{(1+\sin x)-i\cos x}{(1+\sin x)+i\cos x}\right]^n=\left[\cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

2". أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي: $z=-15-8i$.

3". عيِّن متى تكون الدالة $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)$ قابلة للاشتقاق.

السؤال الثاني: ($10+10+10=30$ **درجة**)

1". عرِّف الدالة $f(z)=\dfrac{|z|^2}{z}$ عند $z=0$ لتصبح مستمرة عند $z=0$.

2". اعتماداً على الدوال العكسية، أوجد جميع حلول المعادلة: $\mathrm{ch}\,z=4i$.

3". عبِّر عن العددين العقدين $z_1=e^{\pi e^{i\frac{\pi}{2}}}$, $z_2=\tan(2i)$ بالشكل $a+ib$.

السؤال الثالث: ($20+20=40$ **درجة**)

1". أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=1$ فوق النقاط $\omega_1=-i$, $\omega_2=0$, $\omega_3=\infty$ على الترتيب، ثمَّ أوجد خيال $|z|=1$ وفق التحويلة الناتجة.

2". اعتماداً على صيغة تكامل كوشي أوجد قيمتي التكاملين الآتيين:
$$I_1=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{3z+1}{z^3-4z^2+5z-2}dz \quad , \quad I_2=\int_{|z|=5}\frac{\sin z}{2z^2-z}dz$$

============================= **انتهت الأسئلة** =============================

مدرس المقرر:

د. رامز الشيخ فتوح

السؤال الأول:

أولاً: أثبت أنَّ: $\left[\frac{(1+\sin x)-i\cos x}{(1+\sin x)+i\cos x}\right]^n=\left[\cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

الحل:

$$\left[\frac{(1+\sin x)-i\cos x}{(1+\sin x)+i\cos x}\right]=\left[\frac{(1+\sin x)-i\cos x}{(1+\sin x)+i\cos x}\cdot\frac{(1+\sin x)-i\cos x}{(1+\sin x)-i\cos x}\right]$$

$$=\left[\frac{((1+\sin x)-i\cos x)^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}\right]=\left[\frac{(1+\sin x)^2-\cos^2 x-i\,2(1+\sin x)\cos x}{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}\right]$$

$$=\left[\frac{\sin^2 x+2\sin x+1-\cos^2 x-i\,2(1+\sin x)\cos x}{2+2\sin x}\right]$$

$$=\left[\frac{2\sin^2 x+2\sin x-i\,2(1+\sin x)\cos x}{2(1+\sin x)}\right]=\left[\frac{2\sin x(1+\sin x)-i\,2(1+\sin x)\cos x}{2(1+\sin x)}\right]$$

$$=\left[\frac{2(1+\sin x)\sin x}{2(1+\sin x)}-i\,\frac{2(1+\sin x)\cos x}{2(1+\sin x)}\right]=\sin x-i\cos x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\left[\frac{(1+\sin x)-i\cos x}{(1+\sin x)+i\cos x}\right]=\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

وبحسب علاقة ديموافر نجد أنَّ:

$$\left[\frac{(1+\sin x)-i\cos x}{(1+\sin x)+i\cos x}\right]^n=\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]^n=\left[\cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

ثانياً: أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي: $z=-15-8i$.

الحل:

بفرض أنَّ $z=x+iy$ هو أحد الجذرين عندئذٍ فإنَّ:

$$z^2=(x+iy)^2=-15-8i\quad\Rightarrow\quad(x^2-y^2)+i(2xy)=(-15)+i(-8)$$

ومن تساوي عددين عقديين نجد أنَّ:

$$x^2-y^2=-15\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2xy=-8\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ولنوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين السابقتين وذلك بالشكل:

من (2) نجد أنَّ:

$$y=-\frac{8}{2x}=-\frac{4}{x} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

نعوض في (1) نجد أنَّ:

$$x^2-\left(-\frac{4}{x}\right)^2=-15 \quad\Rightarrow\quad x^2-\frac{16}{x^2}=-15 \quad\Rightarrow\quad x^4-16=-15x^2 \quad\Rightarrow$$

$$x^4+15x^2-16=0 \quad\Rightarrow\quad \left(x^2\right)^2+15\left(x^2\right)-16=0 \quad\Rightarrow\left(x^2-1\right)\left(x^2+16\right)=0$$

وبالتالي إما $x^2=-16 \Rightarrow x^2+16=0$ وهذا الحل مرفوض في الساحة الحقيقية ، وإما:

$$x^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=1 \quad\Rightarrow\quad x=\pm1$$

وبالتالي من أجل $x=1$ نعوض في العلاقة (3) فنجد أنَّ:

$$y=-\frac{4}{(1)}=-4$$

وبالتالي نحصل على العدد العقدي الأول: $z=1-4i$.

ومن أجل $x=-1$ نعوض في العلاقة (3) فنجد أنَّ:

$$y=-\frac{4}{(-1)}=4$$

وبالتالي نحصل على العدد العقدي الثاني: $z=-1+4i$.

مما سبق نجد أنَّ الجذرين التربيعين للعدد العقدي المعطى هما: $z=-1+4i \quad , \quad z=1-4i$.

ثالثاً: عيِّن متى تكون الدالة $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)$ قابلة للاشتقاق.

الحل:

بفرض أنَّ $z=x+iy$ عندئذٍ فإنَّ $\mathrm{Im}(z)=y$ وبالتالي نجد أنَّ:

$$f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)=(x+iy)y=xy+iy^2$$

ومنه يكون:

$$u(x,y)=xy \quad , \quad v(x,y)=y^2$$

وحتى تكون الدالة $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ قابلة للاشتقاق يجب أن تكون المشتقات الجزئية الأربعة من المرتبة الأولى موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

ولنتحقق من ذلك:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x$$

ومن الواضح أنَّ المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي ولكنها لا تحقق شرطي كوشي ريمان عند أي نقطة من نقاط المستوي العقدي باستثناء نقطة الأصل، لذلك فإنَّ الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق فقط عند النقطة $z=0$ أما باقي النقاط فالدالة المعطاة غير قابلة للاشتقاق عندها.

السؤال الثاني:

أولاً: عرِّف الدالة $f(z)=\frac{|z|^2}{z}$ عند $z=0$ لتصبح مستمرة عند $z=0$.

الحل:

تكون الدالة $f(z)$ مستمرة عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا تحقق $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ ، وبالتالي فإنَّ:

$$f(z)=\frac{|z|^2}{z}=\frac{x^2+y^2}{x+iy}=\frac{(x^2+y^2)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{(x^2+y^2)(x-iy)}{(x^2+y^2)}=(x-iy)$$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-iy)=(0)-i(0)=0$$

أو:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z.\bar{z}}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=\overline{(0)}=0$$

وبوضع $f(0)=0$ تصبح الدالة $f(z)$ مستمرة عند النقطة $z=0$ أي أنَّ:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{|z|^2}{z} & ;\ z\neq 0\\ 0 & ;\ z=0\end{cases}$$

ثانياً: اعتماداً على الدوال العكسية، أوجد جميع حلول المعادلة: $\operatorname{ch} z=4i$.

الحل:

$$\operatorname{ch} z=4i \Rightarrow z=\operatorname{arcch}(4i)$$

ونعلم أنَّ: $\operatorname{arcch}(\omega)=\log\left(\omega+\sqrt{\omega^2-1}\right)$

وبالتالي فإنَّ:

$$z=\operatorname{arcch}(4i)=\log\left(4i+\sqrt{(4i)^2-1}\right)=\log\left(4i+\sqrt{-16-1}\right)$$

$$=\log\left(4i\mp i\sqrt{17}\right)=\log\left[\left(4\mp\sqrt{17}\right)i\right]=\log\left|\left(4\mp\sqrt{17}\right)i\right|+i\left(\mp\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\ ;\ n=0,\mp 1,\dots$$

$$=\log\left(\sqrt{17}\mp 4\right)+i\left(\mp\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\ ;\ n=0,\mp 1,\dots$$

وبالتالي فإنَّ جذور المعادلة المعطاة هي:

$$z=\operatorname{arcch}(4i)=\log\left(\sqrt{17}\mp 4\right)+i\left(\mp\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\ ;\ n=0,\mp 1,\ldots$$

ثالثاً: عبِّر عن العددين العقديين $z_1=e^{\pi e^{i\frac{\pi}{2}}}$, $z_2=\tan(2i)$ بالشكل $a+ib$.

الحل:

أولاً: اعتماداً على علاقة أولر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ نجد أنَّ:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+i(1)=i$$

$$z_1=e^{\pi e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=(-1)+i(0)=-1$$

ثانياً: اعتماداً على القاعدتين $\cos(iz)=\operatorname{ch}(z)$, $\sin(iz)=i\operatorname{shz}$ نجد أنَّ:

$$z_2=\tan(2i)=\frac{\sin(2i)}{\cos(2i)}=\frac{i\operatorname{sh}(2)}{\operatorname{ch}(2)}=i\operatorname{th}(2)$$

السؤال الثالث:

أولاً: أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=1$ فوق النقاط $\omega_1=-i$, $\omega_2=0$, $\omega_3=\infty$ على الترتيب، ثمَّ أوجد خيال $|z|=1$ وفق التحويلة الناتجة.

الحل:

إنَّ التحويلة الخطية الكسرية المطلوبة تملك الشكل:

$$\frac{(\omega-\omega_1)(\omega_2-\omega_3)}{(\omega-\omega_3)(\omega_2-\omega_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

وبما أنَّ $\omega_3=\infty$ عندئذٍ نستبدل كل ω_3 بـ $\frac{1}{\omega_3}$ ثم نعوض عن ω_3 بصفر، وذلك بالشكل:

$$\frac{(\omega-\omega_1)(\omega_2\omega_3-1)}{(\omega\omega_3-1)(\omega_2-\omega_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

وبالتعويض نجد:

$$\frac{(\omega+i)(0-1)}{(0-1)(0+i)}=\frac{(z-0)(-i-1)}{(z-1)(-i-0)}\Rightarrow\frac{(\omega+i)}{i}=\frac{-z(1+i)}{-i(z-1)}\Rightarrow\omega+i=\frac{z(1+i)}{(z-1)}\Rightarrow$$

$$\omega=\frac{z(1+i)}{(z-1)}-i=\frac{z(1+i)-i(z-1)}{(z-1)}=\frac{z+iz-iz+i}{(z-1)}=\frac{z+i}{z-1}\Rightarrow$$

$$\boxed{\omega=\frac{z+i}{z-1}}$$

وهي التحويلة الخطية الكسرية المطلوبة.

ولإيجاد خيال الدائرة $|z|=1$ وفق التحويلة المطلوبة نكتب z بدلالة ω بالشكل:

$$\omega=\frac{z+i}{z-1} \Rightarrow \omega z-\omega=z+i \Rightarrow \omega z-z=\omega+i \Rightarrow z(\omega-1)=\omega+i \Rightarrow$$

$$z=\frac{\omega+i}{\omega-1}$$

وبأخذ طويلة الطرفين نجد أنَّ:

$$|z|=\left|\frac{\omega+i}{\omega-1}\right|$$

وبما أنَّ $|z|=1$ فإنَّ:

$$\left|\frac{\omega+i}{\omega-1}\right|=1 \Rightarrow \frac{|\omega+i|}{|\omega-1|}=1 \Rightarrow |\omega+i|=|\omega-1|$$

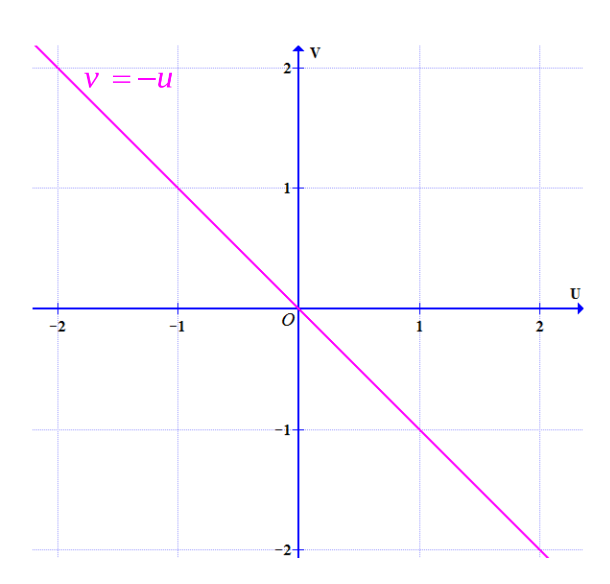
وبفرض $\omega=u+iv$ نجد أنَّ:

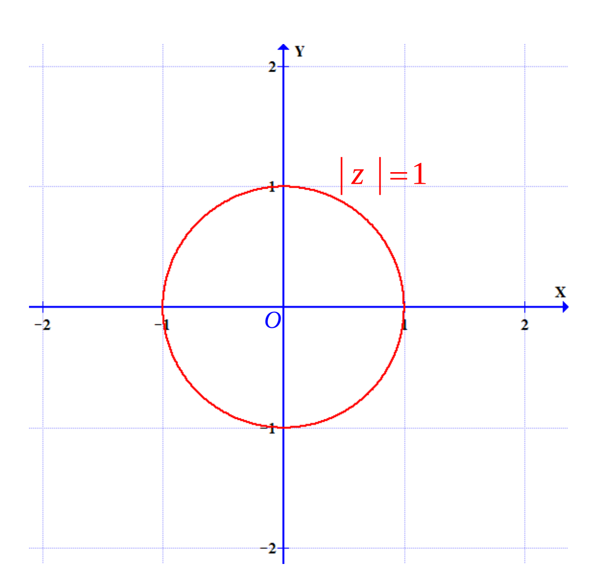
$$|u+iv+i|=|u+iv-1| \Rightarrow |u+i(v+1)|=|(u-1)+iv| \Rightarrow |u+i(v+1)|^2=|(u-1)+iv|^2$$

$$u^2+(v+1)^2=(u-1)^2+v^2 \Rightarrow u^2+v^2+2v+1=u^2-2u+1+v^2 \Rightarrow$$

$$2v=-2u \Rightarrow \boxed{v=-u}$$

وبالتالي فإنَّ خيال دائرة الوحدة $|z|=1$ هو المستقيم الذي معادلته $v=-u$ أي منصف الربعين الثاني والرابع.





ثانياً: اعتماداً على صيغة تكامل كوشي أوجد قيمتي التكاملين الآتيين:

$$I_1=\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{3z+1}{z^3-4z^2+5z-2}dz \quad , \quad I_2=\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{2z^2-z}dz$$

الحل:

التكامل الأول:

$$I_1=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{3z+1}{z^3-4z^2+5z-2}dz$$

الحل:

إنَّ الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=\frac{3}{2}$، والنقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^3-4z^2+5z-2=0$$

من الواضح أنّ $z=2$ هو جذر للمعادلة السابقة حيث أنَّ:

$$(2)^3-4(2)^2+5(2)-2=8-16+10-2=18-18=0$$

وبقسمة كثيرة الحدود z^3-4z^2+5z-2 على $(z-2)$ نحصل على كثيرة الحدود $z^2-2z+1=(z-1)^2$ ، وبالتالي نجد أنَّ:

$$z^3-4z^2+5z-2=(z-1)^2(z-2)$$

ومن الواضح أنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي $z=2\ ,\ z=1$ ، ومن الواضح أنَّ النقطة الشاذة $z=1$ تقع في داخلية الدائرة $|z|=\frac{3}{2}$ ، أما النقطة الشاذة $z=2$ فتقع خارجها، وبالتالي اعتماداً على مبرهنة كوشي جورسات للمناطق بسيطة الترابط نستطيع أن نكتب:

$$I_1=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{3z+1}{z^3-4z^2+5z-2}dz=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\left[\frac{3z+1}{(z-2)}\right]}{(z-1)^2}dz\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

ثمَّ بالاعتماد على صيغة تكامل كوشي:

$$\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

نجد أنَّ:

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\left[\frac{3z+1}{(z-2)}\right]}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{3z+1}{(z-2)}\right]'_{z=1}=2\pi i\left[\frac{3(z-2)-(3z+1)}{(z-2)^2}\right]_{z=1}=2\pi i\left[\frac{-3-4}{1}\right]=-14\pi i$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$I_1=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{3z+1}{z^3-4z^2+5z-2}dz=-14\pi i$$

التكامل الثاني:

$$I_2=\int_{|z|=5}\frac{\sin z}{2z^2-z}dz$$

الحل: إنَّ الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=5$، والنقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي:

$$2z^2-z=0 \;\Rightarrow\; z(2z-1)=0 \Rightarrow z=0 \;,\; 2z-1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2}$$

إنَّ النقاط الشاذة $z_1=0 \;,\; z_2=\frac{1}{2}$ جميعها تقع داخل الكفاف المعطى، لذلك نحيط النقطة $z_1=0$ بدائرة C_1 نصف قطرها صغير بقدرٍ كافٍ، والنقطة $z_2=\frac{1}{2}$ بدائرة C_2 نصف قطرها صغير بقدرٍ كافٍ، بحيث تكون هذه الدوائر غير متقاطعة مثنى مع بعضها ومع الكفاف الأصلي C أيضاً، عندئذٍ بحسب مبرهنة كوشي جورسات للمناطق متعددة الترابط يكون:

$$\int_{|z|=5}\frac{\sin z}{2z^2-z}dz=\int_{C_1}\frac{\left[\frac{\sin z}{(2z-1)}\right]}{(z-0)}dz+\int_{C_2}\frac{\left[\frac{\sin z}{2z}\right]}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}dz \qquad ....(*)$$

واعتماداً على صيغة كوشي التكاملية:

$$\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=2\pi i\, f(z_0)$$

نجد أنَّ:

$$\int_{C_1}\frac{\left[\frac{\sin z}{(2z-1)}\right]}{(z-0)}dz=2\pi i\left[\frac{\sin z}{(2z-1)}\right]_{z=0}=2\pi i\left[\frac{\sin(0)}{(0-1)}\right]=0$$

$$\int_{C_2}\frac{\left[\frac{\sin z}{2z}\right]}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}dz=2\pi i\left[\frac{\sin z}{2z}\right]_{z=\frac{1}{2}}=2\pi i\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right]=2\pi i\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\int_{|z|=5}\frac{\sin z}{2z^2-z}dz=0+2\pi i\sin\left(\frac{1}{2}\right)=2\pi i\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

ملاحظة هامة: هذا الحل يعبِّر عن رأي كاتبه وقد يحتمل الخطأ.

أ. أحمد حاتم أبو حاتم

✆ 0947075489